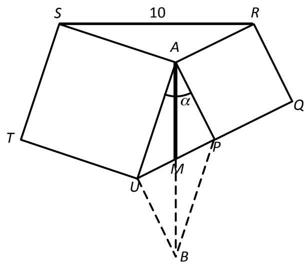
LIV OME. Comunidad de Madrid. 2ª prueba fase local
SOLUCIONES

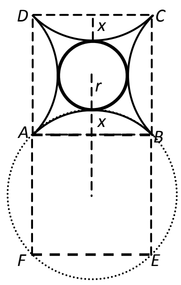
1. Al ser *N* un entero de cinco cifras, resulta que $P = 200\,000 + N$. Por otra parte $Q = 10N + 2$, con lo que $Q = 3P$ nos lleva a $10N + 2 = 600000 + 3N$ y $\boxed{N = 85\,714}$ es el único valor posible para *N*.

2. Al ser *M* el punto medio de *UP* vamos a construir el paralelogramo en el que *UP* sea una diagonal, y, por tanto, *AU* y *AP* los lados. Observamos los triángulos *ASR* y *ABP*: tienen dos parejas de lados iguales (*AS* = *BP* y *AR* = *AP*) y, llamando α al ángulo *UAP*, resulta que $S\hat{A}R = 360º-(90º+90º+\alpha) = 180º-\alpha$, mientras que, en el paralelogramo *AUBP*, podemos escribir $2\alpha + 2A\hat{P}B = 360º$, por lo que $A\hat{P}B = 180º-\alpha$. Así pues, los triángulos *ASR* y *ABP* tienen dos parejas de lados iguales y también igual el ángulo comprendido, por lo que son iguales, con lo que *AB* = *SR* = 10 y $\boxed{AM = 5}$.



3. Como el número 47_ _ 74 no es divisible por 4, Noryne no ha cogido dos números pares, así que las únicas opciones que tiene son: tener una lista de tres números consecutivos, dos impares y uno par; o tener una lista de dos números consecutivos. Pero el producto de dos números consecutivos nunca puede acabar en 4 (las opciones para la última cifra de cada uno son 0–1, 1–2, 2–3, 3–4, 4–5, 5–6, 6–7, 7–8, 8–9, 9–0 y el producto de éstas nunca termina en 4). Así que la lista de Norine es *n*, *n*+1, *n*+2 con *n* impar y *n*+1 no múltiplo de 4: *n*<80 pues 80·81·82 > 80^3 = 512000 > 47_ _74.
Al ser *n*+1 no múltiplo de de 4, pensamos en 73·74·75 que no vale pues no acaba en 0 y además son muy pequeños (73·74·75 = 405150), con lo que la única opción que nos queda es 77·78·79 que es 474474 y la lista de Noryne es $\boxed{77, 78, 79}$.

4. La figura dada está dentro del cuadrado *ABCD*. Dibujando el cuadrado *ABEF* y el círculo circunscrito de radio $\sqrt{2}$, tenemos que $x = \sqrt{2} - 1$, por lo que, como $2x + 2r = 2$, $r = 1 - x = 1 - (\sqrt{2} - 1) = \boxed{2 - \sqrt{2}}$
.



5. Si los dígitos son *a*, *b*, *c*, *d*, la suma pedida es

$$6(a+b+c+d) + 60(a+b+c+d) + 600(a+b+c+d) + 6000(a+b+c+d) =$$
$$= 6666(a+b+c+d) = 66 \cdot 101(a+b+c+d).$$

Al ser $a + b + c + d \le 9 + 8 + 7 + 6 = 30$, el mayor divisor primo de esta suma es $\boxed{101}$.

6. Si n es el número de filas, en la de abajo habrá $1 + 2(n–1) = 2n–1$ cuadraditos y el área de la pirámide será $A = 1 + 3 +5+…+ (2n–1) = n^2$.
Veamos el perímetro: la suma de las longitudes de los tramos verticales es $2n$. Analicemos la suma de las longitudes de los tramos horizontales; el de arriba mide 1, el de abajo $2n–1$ y cada uno de los restantes, que son $n–1$, mide 2.
Así pues, la suma de las longitudes de los tramos horizontales es $1+2n–1+2(n–1) = 4n–2$, con lo que el perímetro P de la pirámide es $2n+4n–2 = 6n–2$.
$P = 6n - 2$, $n = \frac{P+2}{6}$, es decir, $A = n^2 = \left(\frac{P+2}{6}\right)^2$. Por tanto, $\boxed{A = \left(\frac{P+2}{6}\right)^2}$.

7. Pongamos por ejemplo a $R2$ en primer lugar, Entonces, los rojos deben ir en los lugares 1, 3 y 5, teniendo pues, las opciones *R*2_*R*3_*R*4_ o *R*2_*R*4_*R*3_.
Con la primera opción, en segundo lugar solo puede estar *V*4, en cuarto lugar solo *V*2 y en sexto lugar solo *V*3.
Con la segunda opción, ocurre lo mismo, con lo que con *R*2 en primer lugar solo hay dos opciones, por lo que en total habrá $6·2$ = $\boxed{\text{12 maneras de colocarlos}}$.

8. Recordemos que si la descomposición factorial de de n es $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$, entonces el número de divisores de n es $(\alpha_1 + 1)\cdot(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_r + 1)$. Así pues, si N tiene seis divisores, tiene que ser $N=p^5$ o $N=p·q^2$ con p y q primos. Si N fuese p^5, el producto de cinco divisores sería una potencia de p y no es el caso pues $648 = 2^3·3^4$. Así que $N=p·q^2$ y sus seis divisores son: 1, p, q, q^2, pq, pq^2, siendo el producto de todos p^3q^6 con $p=2$, $q=3$ (en otro caso, el producto de todos sería $3^3·2^6$, solo tres factores 3, cuando 648 ya tiene cuatro). Así pues, el producto de todos es $2^3·3^6$ y como el producto de cinco de ellos es $2^3·3^4$, el que falta es 3^2 = $\boxed{9}$.

9. Si llamamos x e y a las edades de Hugo y María, ambos números de dos cifras, el número de cuatro cifras xy es $100x+y=a^2$. Dentro de 17 años, ambas edades seguirán siendo de dos cifras por lo que el número que construyen es $100(x+17)+y+17=100x+y+1717$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 100x + y = a^2 \\ 100x + y + 1717 = b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 - a^2 = 1717 \Rightarrow (b+a)\cdot(b-a) = 1717\cdot 1 \text{ o } (b+a)\cdot(b-a) = 101\cdot 17$$

La primera opción da lugar a $b=859$, $a=858$ y debemos descartarla porque a^2 tendría más de cuatro cifras. La segunda opción da lugar a $b=59$, $a=42$ y $100x+y=42^2=1764$, con lo que la edad actual de Hugo son las dos primeras cifras: $\boxed{\text{17 años}}$.

10. Si definimos $g(x) = (x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+2017)$, resulta que $g(1) = 2018!$.
Pero desarrollando $g(x)$ tenemos:
$g(x) = x^{2017} + f(1)\cdot x^{2016} + f(2)\cdot x^{2015} + \cdots + f(2016)\cdot x + f(2017)$,
así que $g(1) = 1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = 2018!$,
por lo que $f(1) + f(2) + \cdots + f(2017) = \boxed{2018!–1}$.